ある種の外部領域における散乱について (位相解析的方法による偏微分方程式論研究会報告集)

池部, 晃生

数理解析研究所講究録
40巻 1968年 97-108

ある種の外部領域における散乱について

東大　理学部　池部晃生

ここで考えるのは，断面が $n-1$ 次元の有界領域となる柱筒（cylinder）に含まれる障害物（obstacle）の外部領域における，$-\Delta$ に関する散乱問題である。主として波動作用素（wave operator）の存在について述べる。波動作用素に要求される重要な性質である完全性（completeness）については，最後に触れる。

§1．全空間 R^n で定義された $-\Delta$ は，その作用素としての定義域を $C_0^\infty(\Omega)$ に制限すれば，Hilbert空間 $L_2(R^n)$ における非負定値の本質的に自己共役な対称作用素となる。この作用素の自己共役拡張を H_0 で表わす。よく知られているように，これは，（廣義の）固有値 $|\xi|^2 = \xi\cdot\xi$（$\xi \in R^3$）に属する（広義の）固有函数が $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{i\xi\cdot x}$ で与えられる作用素として特徴ずけられるといってもよい。$-iH_0$ を生成作用素とするユニタ

り群 $\{e^{-itH_0}\}$ に関する次の decay principle を示そう。

『$\varphi(x)$ をその台 ($\mathrm{supp}\,\varphi$) が，有界な断面 ($\subset \mathbb{R}^{n-1}$) をもつ柱筒 (軸は x_n-軸に平行) に含まれる有界可測函数とする。(今後現れる函数はすべて可測である。) $\varphi(x)$ による掛算作用素を φ とする。このとき，任意の $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\|\varphi e^{-itH_0} f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad (t \to \pm\infty) 』$$

これを示すには，$\|\varphi e^{-itH_0}\|$ が t に関して一様に有界であるから，その closed linear hull が $L_2(\mathbb{R}^n)$ となるような集合 $\mathcal{D}$ について，上記の性質を示せば十分である。$\mathcal{D}$ としては次のような函数 $f(x)$ の全体をとる。$f(x) = g(\tilde{x})h(x_n)$, $\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_{n-1})$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$。さて $f \in \mathcal{D}$ に対して，$f(x)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} f(x)\,dx$ で表わすことにすれば，

$$|e^{-itH_0} f(x)| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int e^{-it|\tilde{\xi}|^2} e^{i\tilde{x}\cdot\tilde{\xi}} \hat{g}(\tilde{\xi})\,d\tilde{\xi} \right| \times$$
$$\times \left| \int e^{-it\xi_n^2} e^{ix_n\xi_n} \hat{h}(\xi_n)\,d\xi_n \right|,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi e^{-itH_0} f(x)|^2\,dx_n \leq$$
$$\leq \mathrm{const} \sup_{x_n} |\varphi(\tilde{x}, x_n)|^2 \|h\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}^2 \left| \int e^{-it|\tilde{\xi}|^2 + i\tilde{x}\cdot\tilde{\xi}} \hat{g}(\tilde{\xi})\,d\tilde{\xi} \right|^2,$$

$$\|\varphi e^{-itH_0}f\|^2_{L_2(R^n)} \leqq \text{const}\ \sup_x |\varphi(x)|^2 \int_{\text{有界領域}\subset R^{n-1}} d\tilde{x}\ \times$$

$$\times \left|\int e^{-it|\tilde{\xi}|^2} e^{i\tilde{x}\cdot\tilde{\xi}}\, \hat{g}(\tilde{\xi})\, d\tilde{\xi}\right|^2 .$$

最後の不等式の右辺の最後の積分は，$t\to\pm\infty$ のとき，Riemann-Lebesgueの定理により，$\tilde{x}$がR^{n-1}の有界領域を動くとき，一様に0に近づく。故に，$\|\varphi e^{-itH_0}f\|_{L_2(R^n)} \to 0$ $(t\to\pm\infty)$ が $f\in\mathcal{D}$に対して云えた。

§2. 有界断面の柱筒に完全に含まれる障害物の外部を$\Omega\subset R^n$，Ωの境界をΣとする。Ωは，差し当つて，連結開集合であればよく，Σに対する正則性も不要である。Ωにおける $-\Delta$ に対応する，$L_2(\Omega)$で作用する"minimal operator" Aを次の如く定義する。$\mathcal{D}(A)=A$の定義域$=C_0^\infty(\Omega)$，$Af(x)=-\Delta f(x)$ $(f\in\mathcal{D}(A))$。Aは$L_2(\Omega)$における非負定値対称作用素であることは容易に確かめられる。したがつて，Aは自己共役拡張をもつが，一意的とは限らない。

さてHを，Aの自己共役拡張の勝手な一つとしよう。H_0からHへの波動作用素 $W_\pm(H,H_0)$ を次のように定義する。$L_2(R^n)$から$L_2(\Omega)$への作用素$\mathcal{P}$（等化作用素 identification とよばれる，[1] 参照）を，$\forall f\in L_2(R^n)$，$\mathcal{P}f=f|_\Omega$ によつて定

める。さて次の強極限 (s-lim)

$$\underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\ e^{itH}\wp e^{-itH_0}$$

が存在するとき，これを波動作用素 $W_\pm(H,H_0)$ とよぶことにする。（二つの一般には相異なる Hilbert 空間で作用する自己共役作用素の間の波動作用素および散乱作用素の一般論に関しては Kato [1] を参照。） 上の極限は，勿論，$L_2(R^n)$ から $L_2(\Omega)$ への作用素列としての強極限である。

『上述の Ω，H に対して，$W_\pm(H,H_0)$ は存在して，等距離作用素になる』

$W_-=W_-(H,H_0)$ は $W_+=W_+(H,H_0)$ と全く同様に取扱えるので，W_+ についてだけ議論する。

さて $\eta(x)$ は R^n で定義されたなめらかな函数で次の条件を満足するものとする。$0\leq\eta(x)\leq1$，Σ の近傍で $\eta(x)=1$，$\mathrm{supp}\,\eta$ はある有界断面の柱筒に含まれる。$\zeta(x)$ を $\zeta(x)=1-\eta(x)$ で定義する。η，ζ を $\eta(x)$，$\zeta(x)$ による掛算作用素とする。すると $W(t)=e^{itH}\wp e^{-itH_0}$ は

$$W(t)=W_1(t)+W_2(t),$$

$$W_1(t)=e^{itH}\wp\eta e^{-itH_0},\quad W_2(t)=e^{itH}\wp\zeta e^{-itH_0}$$

と書き表わされる。$W_1(t)$ に関しては

$$\|W_1(t)f\|_{L_2(\Omega)} = \|\mathcal{P}\eta e^{-itH_0}f\|_{L_2(\Omega)} \leqq \|\eta e^{-itH_0}f\|_{L_2(R^n)}$$

であるから，§1 の結果によって（η は φ の条件を満たす），$W_1(t)f \to 0$ $(t\to+\infty)$。故に $W_2(t)$ の強収束性を示せば十分である。

形式的に

$$\frac{dW_2(t)f}{dt} = ie^{itH}(H\mathcal{P}\zeta - \mathcal{P}\zeta H_0)e^{-itH_0}f。$$

ここで $f\in\mathcal{D}(H_0)\,(=\mathcal{D}^2_{L^2}(R^n))$ とすると，$e^{-itH_0}f$ も $\mathcal{D}(H_0)$ に属する。更に $\zeta(x)$ はなめらかだから，$\zeta e^{-itH_0}f \in\mathcal{D}(H_0)$。 また $\zeta(x)$ は Σ の近傍で恒等的に 0 であるから $\mathcal{P}$ を作用しても実質的な変化は受けない。故に $\mathcal{P}\zeta e^{-itH_0}f \in \mathcal{D}^2_{L_2(\Omega)} \subset \mathcal{D}(H)$ となつて，これに H を作用させることができる。一方 $\mathcal{P}\zeta H_0 e^{-itH_0}f$ が意味をもつことは，$e^{-itH_0}f\in\mathcal{D}(H_0)$ から明らかである。したがつて上式は $f\in\mathcal{D}(H_0)$ で意味をもつ。

$W_2(t)$ の作用素ノルムは t に関して一様有界であるから，強収束性は $\mathcal{D}(H_0)$ に対して確かめれば十分である。

$f\in\mathcal{D}(H_0)$ に対して，$g=e^{-itH_0}f$ とおけば，

$$\begin{aligned}(H\mathcal{P}\zeta-\mathcal{P}\zeta H_0)g &= (-\Delta\mathcal{P}\zeta-\mathcal{P}\zeta(-\Delta))g\\ &= -\mathcal{P}(\operatorname{grad}\zeta)\cdot\operatorname{grad} g - \mathcal{P}(\Delta\zeta)g。\end{aligned}$$

したがつて，$dW_2(t)f/dt$ を積分することによつて

$$W_2(t)f = \rho\zeta f - i\int_0^t e^{i\tau H}\rho(\mathrm{grad}\,\zeta)\cdot\mathrm{grad}(e^{-i\tau H_0}f)d\tau$$
$$-i\int_0^t e^{i\tau H}\rho(\Delta\zeta)e^{-i\tau H_0}f\,d\tau$$

が得られるから

$$(*)\qquad \int_0^\infty \|(\mathrm{grad}\,\zeta)\cdot\mathrm{grad}(e^{-itH_0}f)\|dt < \infty,$$

$$(**)\qquad \int_0^\infty \|(\Delta\zeta)e^{-itH_0}f\|dt < \infty$$

を $f \in \mathfrak{D}(H_0)$ について示せばよい。更に f の範囲として，$\mathfrak{D}(H_0)$ に含まれる fundamental set $\mathfrak{D}$ に制限してもよい。$\mathfrak{D}$ として次のような函数 $u_a(x)$ の全体をとる（See Kato [2], p. 534）。

$$u_a(x) = e^{-|x-a|^2/2}, \quad a \in R^n.$$

さて $v_a(x,t) = \exp(-|x-a|^2/(2+4it))$ とおけば，

$$e^{-itH_0}u_a(x) = (1+2it)^{-\frac{n-1}{2}}v_{\tilde{a}}(\tilde{x},t)(1+2it)^{-\frac{1}{2}}v_{a_n}(x_n,t),$$

$$\mathrm{grad}\,e^{-itH_0}u_a(x) = (1+2it)^{-\frac{n-1}{2}}\Big\{(1+2it)^{-\frac{1}{2}}|\tilde{x}-\tilde{a}|v_{\tilde{a}}(\tilde{x},t)\,\mathrm{grad}|\tilde{x}-\tilde{a}|\times$$
$$\times(1+2it)^{-\frac{1}{2}}v_{a_n}(x_n,t) +$$
$$+v_{\tilde{a}}(\tilde{x};t)(1+2it)^{-1}|x_n-a_n|v_{a_n}(x_n,t)\,\mathrm{grad}|x_n-a_n|\Big\}$$

となるが，$|v_{\tilde{a}}(\tilde{x},t)| \leq 1$ および $|(1+2it)^{-\frac{1}{2}}|\tilde{x}-\tilde{a}|v_{\tilde{a}}(\tilde{x},t)| \leq$ ≤ 1 なることを使うと

$$\|\Delta\zeta\, e^{-itH_0}u_a\| \leqq (1+4t^2)^{-\frac{n-1}{4}}\Big[\int_{\mathrm{supp}\,\Delta\zeta} |\Delta\zeta(x)|^2(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}|v_{a_n}(x_n,t)|^2dx\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$\|(\mathrm{grad}\,\zeta)\cdot\mathrm{grad}\,e^{-itH_0}u_a\| \leqq$$

$$\leqq \sqrt{2}\,(1+4t^2)^{-\frac{n-1}{4}}\Big[\int_{\mathrm{supp}(\mathrm{grad}\,\zeta)} |\mathrm{grad}\,\zeta(x)|^2(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}|v_{a_n}(x_n,t)|^2dx$$

$$+\int_{\mathrm{supp}(\mathrm{grad}\,\zeta)} |\mathrm{grad}\,\zeta(x)|^2(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}|x_n-a_n|^2|v_a(x_n,t)|^2dx\Big]^{\frac{1}{2}}$$

が得られる。上の二つの不等式において，［　］内の積分は収束して，tに依らないことがわかる。故に$n\geqq 4$ならば，(*)および(**)がでる。$n\leqq 3$の場合(もっとも$n=1, 2$の場合は柱筒型の障害物を考える限り，Ωが連結でなくなるからあまり面白くないが)には，上のままでは困るけれども，$u_a(x)$として

$$\hat{u}_a(\xi)=\Big(\prod_{i=1}^{n}\xi_i\Big)e^{-|\xi|^2-i\xi\cdot a}$$

の形のものをとれば(Kuroda [3] 参照)，上と同様な論法によって，(*)，(**)が示される。以上で波動作用素の存在は示された。

次に等距離性について述べる。$W(t)$の形から$\|W_\tau(H,H_0)f\|_{L_2(\Omega)}\leqq\|f\|_{L_2(R^n)}$なることは明らかであるが，実は等号が成立する。それを示すには，$L_2(R^n)$における射影作用素E，Fをそれぞれ

$$Ef(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}, \qquad F = I - F$$

で定義する（Eと前に定義した$\mathcal{P}$とは似たようなもので，$\|Ef\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathcal{P}f\|_{L_2(\Omega)}$，$f \in L_2(\mathbb{R}^n)$なる関係がある）。そうすると

$$\begin{aligned} \|W(t)f\|^2_{L_2(\Omega)} &= \|\mathcal{P}e^{-itH_0}f\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &= \|Ee^{-itH_0}f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|e^{-itH_0}f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} - \|Fe^{-itH_0}f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

となり，FがΩの補集合に対する特性函数をかける掛算作用素に他ならないことを考えれば，§1の*decay principle*によって，$\|Fe^{-itH_0}f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \to 0$　$(t \to \pm\infty)$がでて，e^{-itH_0}のユニタリ性と併せれば，$W_\pm(H, H_0)$が等距離的であることがわかる。

§3.　$W_\pm(H, H_0)$の存在と等距離性が云えると，例えば，次のようなことが云える。

『*Minimal operator* A の勝手な自己共役拡張の絶対連続スペクトルは空でなく，少なくとも $[0, \infty)$ を含む。』

これの証明の概要を述べる。簡単のため$W_\pm(H, H_0)$を$W_\pm$

と記す。$L_2(R^n)$ の $W_\pm$ による像は $L_2(\Omega)$ の閉部分空間であつて，それらの上への射影作用素は $E_\pm = W_\pm W_\pm^*$ で与えられる。先ず $e^{isH} W(t) = W(t+s) e^{iH_0 s}$ なる関係において $t \to \pm\infty$ とすることにより

$$e^{isH} W_\pm = W_\pm e^{isH_0} \Longleftrightarrow E(\lambda) W_\pm = W_\pm E_0(\lambda)$$

が得られる。ただし，$E_0(\lambda)$，$E(\lambda)$ はそれぞれ H_0，H に対応する単位分解の射影作用素である。また共役作用素をとることにより

$$W_\pm^* E(\lambda) = E_0(\lambda) W_\pm^*。$$

これらの関係により

$$E(\lambda) E_\pm = E(\lambda) W_\pm W_\pm^* = W_\pm E_0(\lambda) W_\pm^* = W_\pm W_\pm^* E(\lambda) = E_\pm E(\lambda)$$

となるから，$E_\pm L_2(\Omega)$ は H の reducing subspace であることがわかる。この部分空間の元 $W_\pm u$，$u \in L_2(R^n)$ が H に関して絶対連続であることを示そう。そうすれば，H のこの部分空間における部分が H_0 とユニタリ同値になるから，前に述べたことが導かれる。さて $W_\pm u$，$u \in L_2(R^n)$ に対して

$$\begin{aligned}(E(\lambda) W_\pm u, W_\pm u)_{L_2(\Omega)} &= (W_\pm E_0(\lambda) u, W_\pm u)_{L_2(\Omega)} \\ &= (E_0(\lambda) u, u)_{L_2(R^n)}。\end{aligned}$$

最後の式は，H_0 が絶対連続であることによつて，λ に関して絶対連続，すなわち $W_\pm u$ が H に関して絶対連続となる。

§4. 前節の結果では，$E_\pm L_2(\Omega)$ は，一般に，H の絶対連続部分空間の真の部分空間であつて，H の絶対連続な部分（全体）が H_0 とユニタリ同値なことは云えていない。このようなことが起る場合，すなわち，$E_\pm$ が H の絶対連続部分空間の上への射影作用素と一致する場合に，$W_\pm(H, H_0)$ は完全であるという。

完全に柱筒型の障害物を考え，その外部を Ω，境界を Σ とする。前出の作用素 A の Friedrichs 拡張を H_1 としよう。この作用素は，Ω における $-\Delta$ と，Σ 上での zero Dirichlet 条件を組合せたものに他ならない。H_1 が H_0 とユニタリ同値なこと（したがって H_1 自身が絶対連続），波動作用素 $W_\pm(H_1, H_0)$ が存在して完全であること，などは，R^{n-1} に含まれる有界な障害物の外部領域における zero Dirichlet 境界条件に対応する $-\Delta$ に関する既知の結果から導くことができる（有界障害物の外部領域における散乱については [4], [5], [6] などを参照）。

さて Σ の有界な部分（$|x_n| \leq \mathrm{const}$）で zero Dirichlet 条件を，第三種の境界条件に変えてみよう：$\partial u/\partial n + \sigma u = 0$。これに対応する A の拡張は，微分作用素 $-\Delta$ とこの境界条件から得られる二次形式を使って決定することができる。これを H_2 としよう。この場合，σ があまりひどい函数でなければ

ば，H_2 は下に半有界な作用素であることがわかる。したがって，γ を適当にとれば，$H_i+\gamma$，$i=1,2$ は共に正定値となる。Birman [7] は，整数 k を適当にえらべば，$(H_1+\gamma)^{-k}-(H_2+\gamma)^{-k}$ がトレース族の作用素になることを示した。このことによって，(See [2], Chap. X)，波動作用素

$$W_\pm(H_2,H_1)=\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{itH_2}e^{-itH_1},\quad W_\pm(H_1,H_2)=\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{itH_1}e^{-itH_2}P_2$$

（P_i は H_i の絶対連続部分空間への射影で，特に $P_1=I$ である）が存在して完全，すなわち $W_\pm(H_2,H_1)W_\pm(H_2,H_1)^*=P_2$，$W_\pm(H_1,H_2)W_\pm(H_1,H_2)^*=I$ となり，更に $W_\pm(H_1,H_2)=W_\pm(H_2,H_1)^*$，$H_2P_2W_\pm(H_2,H_1)=W_\pm(H_2,H_1)H_1$ となることがわかる。このことと，前に述べた H_1 と H_0 とのユニタリ同値性を用いれば，H_2P_2（H_2 の絶対連続部分）と H_0 とのユニタリ同値性，すなわちスペクトル構造の同一性が得られる。

文　献

[1] Kato, T.: *Scattering theory with two Hilbert spaces.* Journ. Funct. Anal. 1 (1967), 342-369.

[2] Kato, T.: *Perturbation theory for linear operators.* Springer, Berlin, 1966.

[3] Kuroda, S. T.: On the existence and the unitary property of the scattering operator. Nuovo Cimento, Ser. X, 12 (1959), 431-454.

[4] Lax, P & R. S. Phillips: Scattering theory. Academic Press, New York, 1967.

[5] Shenk II, N. A.: Eigenfunction expansions and scattering theory for the wave equation in an exterior region. Arch. Rat. Mech. Anal. 21 (1966), 120-150.

[6] Ikebe, T.: Scattering for the Schrödinger operator in an exterior domain. Journ. Math. Kyoto Univ. 7 (1967), 93-112.

[7] Birman, M. Sh.: Perturbations of the continuous spectrum of a singular elliptic operator under the change of the boundary and boundary conditions. Vest. Leningrad. Univ., Ser. Mat. Meh. Astr. 1 (1962), 22-55.